



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

4633 Методичні вказівки
для практичних робіт
на тему «Границя функції»
з курсу «**Вища математика**»
для студентів спеціальності 183
«Технології захисту навколишнього середовища»
усіх форм навчання

Суми
Сумський державний університет
2019

Методичні вказівки для практичних робіт на тему «Границя функції» з курсу «Вища математика» / укладачі: Н. С. Мартинова, Ю. А. Кравченко – Суми : Сумський державний університет, 2019. – 23с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Питання для самопідготовки

1. Що називається границею функції в точці.
2. У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці? Навести приклади.
3. Основні теореми про границі.
4. Що називається нескінченно великою функцією? Навести приклади, рисунки.
5. Що називається нескінченно малою функцією? Навести приклади, рисунки.
6. Перша та друга чудові границі.
7. Еквівалентні нескінченно малі функції.

Обчислення границь за визначенням пов'язано зі складними перетвореннями виразів.

Тому їх здебільшого обчислюють за допомогою властивостей – *основних теорем про границі*:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, де $C = \text{const}$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $C = \text{const}$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

Крім того, потрібно знати, що для всіх основних елементарних функцій у будь-якій точці їхньої області визначення справедлива рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$.

І. Щоб знайти границю функції, необхідно підставити граничне значення аргументу до виразу, що стоїть під знаком границі. Якщо внаслідок підстановки отримаємо числове значення або нескінченність, то границю визначено.

Приклад 1. Обчислити:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x - 6)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x - 6) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 6 = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 2 - 6) = -3;$$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x - 2 \cos x}{x^3 - 1}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x - 2 \cos x}{x^3 - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \sin x - 2 \cos x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 1)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \sin x - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} x^3 - \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0 + 0 - 2}{0 - 1} = 2. \end{aligned}$$

Під час обчислень границь часто доводиться оперувати з нескінченно малими та нескінченно великими величинами (функціями).

Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається *нескінченно великою*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$.

Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Нескінченно великі та нескінченно малі функції мають такі властивості:

1. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \rightarrow x_0$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \rightarrow x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ – нескінченно велика величина при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \rightarrow x_0$.

2. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є величиною нескінченно малою.

3. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є функцією нескінченно малою.

4. Добуток нескінченно малих функцій є функцією нескінченно малою.

5. Добуток нескінченно малої функції на число є функцією нескінченно малою.

6. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є функцією нескінченно малою.

Приклад 2. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x-1}$.

Розв'язання: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{0} = \infty$.

II. Під час обчислення деяких границь підстановка у функцію граничного аргументу приводить до виразів, які називаються *невизначеності*.

Основні невизначеності:

1. Відношення двох нескінченно великих величин – невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

2. Відношення двох нескінченно малих величин – невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

3. Різниця двох нескінченно великих величин – невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$.

4. Добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику – невизначеність виду $\{0 \cdot \infty\}$.

5. Вирази 0^0 , ∞^0 та 1^∞ також є невизначеності.

Операцію знаходження границі в цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо основні з них.

Приклад 3. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9x + 20}$.

Розв'язання. У разі підстановки граничного значення аргументу отримаємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Виділимо множник $(x - 4)$, який дає нулі в чисельнику і знаменнику, скоротимо на нього і обчислимо значення заданої границі.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9x + 20} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 4}{x - 5} = -8.$$

Приклад 4. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 7x + 11}{8x^3 - 5x - 9}$.

Розв'язання. У разі підстановки граничного значення аргументу отримаємо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. У таких випадках необхідно в чисельнику і знаменнику скоротити на найвищий степінь невідомого x :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 7x + 11}{8x^3 - 5x - 9} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{7x}{x^3} + \frac{11}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3} - \frac{5x}{x^3} - \frac{9}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{11}{x^3}}{8 - \frac{5}{x^2} - \frac{9}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Під час обчислення прикладів, схожих з 3-м і 4-м, можна користуватися такими прийомами спрощеного обчислення границь.

1. Якщо в разі підстановки до виразу $x = x_0$ приходимо до невизначеності $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, то це означає, що x_0 є коренем многочленів

$P_n(x)$ чисельника та $Q_m(x)$ знаменника. Для розкриття такої невизначеності необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники та скоротити їх на $(x - x_0)$.

2. Залежно від того, чий степінь є більшим – чисельника чи знаменника, отримаємо результат:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } m > n, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{якщо } m = n, \\ \infty, & \text{якщо } m < n. \end{cases}\end{aligned}$$

III. Крім того, розкриваючи невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, коли під знаком границі тригонометричні функції, часто користуються формулою, що має назву *першої важливої границі*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (1)$$

та наслідками з неї:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1.\end{aligned}\quad (2)$$

Якщо граничне значення аргументу прямує до нуля, функції, які стоять у чисельнику і знаменнику під знаком границі в формулах (2), називаються *еквівалентними нескінченно малими*. Під час знаходження границі відношення двох нескінченно малих функцій кожен з них (або лише одну) можна замінити іншою нескінченно малою, еквівалентній заданій.

Приклад 5. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2+2x-8}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2+2x-8} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \frac{1}{\cos x})}{x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (-2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^3 \cos x} = \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \frac{x^2}{4}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\
 &= -\frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

IV. Під час обчислення границі степенево-показникової функції $y = u(x)^{v(x)}$ може статися, що $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$. У такому разі спостерігається невизначеність типу $\{1^\infty\}$. Для її розкриття застосовують **другу важливу границю**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (3)$$

а також її наслідки

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{p}{x}} = e^{kp}. \quad (4)$$

Приклад 6. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+2} \right)^{2x-1}.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Перетворивши вираз, одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3} \right)^{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3-2}{4x+3} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4x+3} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4x+3} \right)^{\frac{4x+3}{-2} \cdot \left(-\frac{2(2x-1)}{4x+3} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2(2x-1)}{4x+3}} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{x+3} \right)^{2x-1}.$$

Розв'язання. При підстановці граничного значення аргументу в функцію отримаємо 4^∞ і тому $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{x+3} \right)^{2x-1} = \infty$.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{4x+3} \right)^{2x-1}.$$

Розв'язання. У разі підстановки граничного значення аргументу у функцію отримаємо $\left(\frac{1}{4}\right)^\infty$ і тому $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{4x+3} \right)^{2x-1} = 0$.

Зверніть увагу! – у прикладах б) і в) невизначеності немає.

Практичні завдання

Обчислити задані границі.

Варіант 1

- $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4x - 11).$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2-4x+4}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)(x^2+1)}{5x^3+2x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3-2x+5}{3x^2+7x-8}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2-2x+5}{3x^3+7x-8}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x+1}\right)^{2x-3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}.$

Варіант 2

- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 3x + 8).$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{4x^3-5x^2+x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x-2}{x}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+1}{5x+4}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+1}{5x^5+4}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+1}{5x^2+4}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2x}\right)^{2-3x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{-2x+x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}.$

Варіант 3

- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^5 - 6x + 8).$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x+2}{6x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+x^2}{5-x-x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+x^4}{5-x-4x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+4x^2}{5-x-x^4}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{4x-1}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{5x}\right)^{4x-1}.$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x-x^3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \operatorname{tg} 2x}{\arctg^2 x}.$$

Варіант 4

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 7 - x^3).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9+2x+x^4}{5-x-x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2+x+2}{6(x-1)^3}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{x-5}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x-3}\right)^{x-5}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+7x^2}{5-x-x^2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+x^2}{5-x-6x^5}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

Варіант 5

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} (5 + 2x - 11x^3).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2+3}{(5x+2)(8x^2-3)}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+7x}{x^2+4x+4}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x}\right)^{6x+1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2+x+2}{(x-2)^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{x}\right)^{1-x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-5x^2+4x^5}{3x^5+6x+8}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^3+x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-5x^2+4x^5}{3x^2+6x+8}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

Варіант 6

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} (5 + 7x - 11x^3).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-x+1}{9x^3+4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+7x}{x^2+6x+9}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x}\right)^{3-2x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+1}{9x^3+4}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 3x}{\ln(1-9x^2)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+1}{9x^2+4}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}.$$

Варіант 7

- $\lim_{x \rightarrow 3} (-6x + 7 - 10x^3).$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}.$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 10}{x^2 + x - 20}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 + 4x^4}{3x^5 + 6x + 1}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 + 4x^5}{3x^5 + 6x + 1}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 + 4x^5}{3x^2 + 6x + 1}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{4x+3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{x}\right)^{-4x+3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x \sin x)}{1 - \cos x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + x \sin x}{\sin^2 x}.$

Варіант 8

- $\lim_{x \rightarrow 0} (12 - 6x + 7).$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 15}{x^2 - 2x - 3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 6x + 5x^3}{3 - 8x + 6x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 6x + 5x^3}{3 - 8x + 6x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 6x + 5x^7}{3 - 8x + 6x^8}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{3x}\right)^{-2x+3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x}\right)^{-2x+3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{3 \operatorname{tg} 2x}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} \cdot \arcsin \frac{4}{x}.$

Варіант 9

- $\lim_{x \rightarrow 3} (9 + 5x - 11x^2).$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8}{x^2 + x - 6}.$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2(x-1)}{(2-x)(x^2+1)}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-5)^2(x-1)}{(2-x)(x^4+1)}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-5)^5(x-1)}{(2-x)(x^2+1)}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x}\right)^{-3x+2}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{2x}\right)^{3x+2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{\sin(x+2x^2)}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}.$

Варіант 10

- $\lim_{x \rightarrow 7} (13 - 6x + 9).$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2}{x^3 + 1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x^3 + 7}{2x^4 - 2x^3 + 2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 7}{2x^4 - 2x^3 + 2}.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x^3 + 7}{2x^2 - x + 2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x+1}.$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x-3}\right)^{3x+1}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos 2x}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + 6x}{\sin 3x}.$

Варіант 11

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (-x + 5 - 10x^2).$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 2}.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4x^2 + 5x^3}{2x^3 - 3x^2 + 2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4x^2 + 5x^3}{2x^7 - 3x^2 + 2}.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4x^2 + 5x^4}{2x^3 - 3x^2 + 2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{-4x+3}.$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{-4x+3}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 5x - \cos 3x}.$

Варіант 12

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 25x - 11).$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 8}.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x + 7x^3}{2 - 3x + 2x^3}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x + 7x^3}{2 - 3x + 2x^7}.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x + 7x^3}{2 + x + 2x^2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{4x+1}.$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4x+1}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{4x^3 - 5x^2}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}.$

Варіант 13

- $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 10x^2).$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 8}{x^2 - 4x}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2(3x+1)}{(1-x)^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2(3x+1)}{(1-x)^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^3(3x+1)}{(1-x)^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{x-1}\right)^{3-2x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2 \sin x)}{x(e^x \operatorname{tg} x - 1)}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{3 \operatorname{arctg} 2x}.$

Варіант 14

- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 5x - 6).$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-10}{x^3-8}.$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{x^3-8}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-4x^2+5x^3}{3+3x^4+2x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-4x^2+5x^4}{3+3x^4+2x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-4x^2+5x^6}{3+3x^4+2x^3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x+2}\right)^{x-2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{4x^3+6x}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{3 \sin^2 x}.$

Варіант 15

- $\lim_{x \rightarrow 7} (3 - 2x + 49).$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+5x-6}.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2+5x-6}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6-7x^3+5}{3x^4-6x+3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-7x^3+5}{3x^4-6x+3}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-7x^3+5}{3x^3-6x+3}.$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{3x+5}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{5x+1} \right)^{3x+5}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^3)}{5 \arctg 2x^3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2 \sin^2 x}.$$

Варіант 16

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 5x + 7).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-21}{x^2+3x+2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3+5}{3x^3+4x+1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3+5}{3x^2+4x+1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2+5}{3x^3+4x+1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+5} \right)^{3x+1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{6 \ln(1+2x)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3 \sin^2 x}.$$

Варіант 17

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - t g x + 2).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x+2}{x^3-x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5+8x-4}{2x^3+3x+1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+8x-4}{2x^5+3x+1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+8x-4}{2x^3+3x+1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{x-3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+1}{x-2} \right)^{x-3}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x^2)}{5x \arctg 2x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}.$$

Варіант 18

1. $\lim_{x \rightarrow 5} (-x + 5 - x^2).$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 4}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x - 1}{2x^4 + 3x + 2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 8x - 1}{2x^3 + 3x + 12}.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 8x - 1}{2x^3 + 3x + 2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{x+2} \right)^{x-2}.$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+2} \right)^{x-2}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{3 \sin x}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$

Варіант 19

1. $\lim_{x \rightarrow -4} (x^3 - 7x + 12).$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x}{x^2 - 3x + 2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)(x^3+1)}{(x-1)(x^2+5)}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)(x^2+1)}{(x-1)(x^3+5)}.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+5)}.$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{x+6}.$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-3x} \right)^{x+6}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+x^2))}{2(1-\cos x)}.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5 \sin^2 x}.$

Варіант 20

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (-4x + 5 - 12x^2).$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}.$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+5x+8x^6}{2+3x^4+4x}.$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+5x+8x^4}{2+x^4+4x}.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+5x+x^4}{2+3x^5+4x}.$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{x+6} \right)^{x-1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{8 \arctg 3x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+6} \right)^{x-1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 2x}{x \arcsin x}.$$

Вариант 21

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 5x - 16).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-x+x^6}{1-x^3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{x^2-8x+16}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+2} \right)^x.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{x^2-9x+16}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^{x+2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-x+x^2}{1-x^3}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - 1}{\arcsin 3x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-x+x^3}{1-x^3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\arctg x}.$$

Вариант 22

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 8x + 27).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x+x^2}{4+2x^3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{-x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+7}{x^2-4x+3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^{-x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x+x^2}{4+2x^2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x^2+3x)}{\ln(1+x)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x+x^4}{4+2x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin x^2}.$$

Варіант 23

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (\cos(2 - x) + 5x - 16).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 4}{(1 - x)(1 - 2x)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 4}{(1 - x)(1 - 2x)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 4}{(1 - x)(1 - 2x^4)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{4x+1}\right)^{2x+1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x+1}\right)^{2x+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) \ln(1+x)}{1 - \cos x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 4x}{\sin^2 x}.$$

Варіант 24

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (2 - 35x - 6).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{(1 - 2x)(1 + x)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{(1 - 2x)(1 + x)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^4}{(1 - 2x)(1 + x)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{1+2x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{1+2x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x * \arctan 2x}{\ln^2(1 + 2x)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3 \sin^2 x}.$$

Варіант 25

$$1. \lim_{x \rightarrow -4} (x^3 - 9x + 2).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)(4-x)}{(1+3x)^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)(4-x)}{(1+3x)^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)(4-x^3)}{(1+3x)^3}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x+3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{2x}\right)^{-2x+3}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\arcsin 6x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}.$$

Варіант 26

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (6x^3 - tg 2x + 5).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x^2-2)}{(x-3)(x-4)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x^2-4)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{x-3}\right)^{x-5}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \operatorname{tg} \arcsin x}{\sqrt{\ln(2 - \cos x)}}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2 \sin^2 x}.$$

Варіант 27

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 5x + 22).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-1)(1-2x)}{x^4+1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3-1)(1-2x)}{x^4+1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3-1)(1-2x)}{x^6+1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^x.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{x+2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(x^2-x)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 3x}{x^2}.$$

Варіант 28

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 + 9x + 2).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{(x+1)(x-2)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x - 1}{(x+1)(x-2)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{(x+1)(x^3 - 2)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{1+x} \right)^{1-x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^{1-x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+x \ln 4)}{\sin x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x * \operatorname{arctg} 2x}{(1 - \cos x)^2}.$$

Варіант 29

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 8x + 27).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 + (x-3)}{(2x+1)^3}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^4 + (x-3)}{(2x+1)^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 + (x-3)}{(2x+1)^6}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^x.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3x+1} \right)^{x-1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin^2 x}{\sin(\ln(1+x^2))}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + x)}{1 - \cos 2x}.$$

Варіант 30

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 8x + 7).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 5x^2 + 6x^5}{8 + 4x^2 + 5x^5}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 5x^2 + 6x^5}{8 + 4x^2 + 5x^6}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 5x^2 + 6x^7}{8 + 4x^2 + 5x^6}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x \operatorname{arctg} 2x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{5x-1}\right)^{1-x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{arctg} 3x}.$$

Додаток 1. Основні еквівалентні нескінченно малі величини

$$\sin \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{arcsin} \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0;$$

$$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \alpha \rightarrow 0;$$

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0;$$

$$a^\alpha - 1 \sim a \ln a, \alpha \rightarrow 0;$$

$$\log_a(1 + \alpha) \sim \alpha \log_a e, \alpha \rightarrow 0;$$

$$\ln(1 + \alpha) \sim \alpha, \alpha \rightarrow 0;$$

$$(1 + \alpha)^k - 1 \sim k\alpha, \alpha \rightarrow 0, k > 0.$$

Навчальне видання

Методичні вказівки
для практичних робіт
на тему «Границя функції»
з курсу **«Вища математика»**
для студентів спеціальності 183
«Технології захисту навколишнього середовища»
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск
Редактор
Комп'ютерне верстання

І. О. Шуда
І. О. Кругляк
Н. С. Мартинова

Підписано до друку 26.09.2019, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 3,37. Обл.-вид. арк. 2,28 Тираж 5 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

До друку та в світ
дозволю на підставі
«Єдиних правил»,
п. 2.6.14
Начальник організаційно-
методичного
управління

В. Б. Юскаєв

4633 Методичні вказівки
для практичних робіт
на тему «Границя функції»
із курсу «Вища математика»
для студентів спеціальності 183
«Технології захисту навколишнього середовища»
усіх форм навчання

Усі цитати, цифровий та
фактичний матеріал,
бібліографічні
відомості перевірені,
запис одиниць
відповідає стандартам

Укладачі

Н. С. Мартинова,
Ю. А. Кравченко

Відповідальний за випуск
Декан факультету

І. О. Шуда
С. І. Проценко

Суми
Сумський державний університет
2019